

Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Onafhankelijk van a

1 maximumscore 5

- $f_a'(x) = a \cdot e^{ax} + (1 + ax) \cdot e^{ax} \cdot a$ 2
- $f_a'(x) = 0$ voor $x = -\frac{2}{a}$ 1
- $f_a(-\frac{2}{a}) = -\frac{1}{e^2}$ (dus $P_a(-\frac{2}{a}, -\frac{1}{e^2})$) 1
- Hieruit volgt dat alle punten P_a dezelfde y -coördinaat hebben, dus liggen al deze punten op één (horizontale) lijn 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

2 maximumscore 5

- De oppervlakte van driehoek OAB is $\frac{1}{2a}$ 1

- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_a , de x -as en de y -as is $\int_{-\frac{1}{a}}^0 (1+ax) \cdot e^{ax} dx$ 1

- Een primitieve van $(1+ax) \cdot e^{ax}$ is $x \cdot e^{ax}$ 1

- $\left[x \cdot e^{ax} \right]_{-\frac{1}{a}}^0 = \frac{1}{ea}$ (dus deze oppervlakte is $\frac{1}{ea}$) 1

- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_a en het lijnstuk AB is dus $\frac{1}{2a} - \frac{1}{ea}$, dus de verhouding is $(\frac{1}{2a} - \frac{1}{ea}) : \frac{1}{ea} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{e}) : \frac{1}{e}$, dus onafhankelijk van a 1

of

- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_a , de x -as en de y -as is $\int_{-\frac{1}{a}}^0 (1+ax) \cdot e^{ax} dx$ 1

- Een primitieve van $(1+ax) \cdot e^{ax}$ is $x \cdot e^{ax}$ 1

- $\left[x \cdot e^{ax} \right]_{-\frac{1}{a}}^0 = \frac{1}{ea}$ (dus deze oppervlakte is $\frac{1}{ea}$) 1

- De oppervlakte van driehoek OAB is $\frac{1}{2a}$ 1

- De verhouding van deze oppervlakten is onafhankelijk van a , dus is ook de gevraagde verhouding onafhankelijk van a 1

of

- De grafiek van f_a en het bijbehorende lijnstuk AB ontstaan uit de grafiek van f_1 en het daarbij behorende lijnstuk AB door vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{a}$ 2

- Hierbij worden zowel de oppervlakte van de driehoek als de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_1 , de x -as en de y -as vermenigvuldigd met $\frac{1}{a}$ 2

- De verhouding van deze oppervlakten is dus onafhankelijk van a en daarmee ook de gevraagde verhouding 1

Het standaard proefglas

3 maximumscore 4

- Het volume (in mm^3) is $\int_{0,0}^{55,3} \pi(f(x))^2 dx$ 1
- Beschrijven hoe deze integraal (met de GR) berekend kan worden 1
- De uitkomst van deze integraal is (ongeveer) 7994 1
- Het antwoord: 8 (cm^3) 1

4 maximumscore 5

- ($C(87,5; 32,5)$ is de top van de parabool, dus) een formule voor kromme CD is van de vorm $y = a(x - 87,5)^2 + 32,5$ 2
- $D(155,0; 23,0)$ is een punt van de kromme CD , dus $23,0 = a(155,0 - 87,5)^2 + 32,5$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- Dit geeft voor a de waarde $-0,002$ (of nauwkeuriger) (dus een formule voor kromme CD is $y = -0,002 \cdot (x - 87,5)^2 + 32,5$) 1

of

- (De coördinaten van C zijn $(87,5; 32,5)$, dus) $\overline{OC} = \begin{pmatrix} 87,5 \\ 32,5 \end{pmatrix}$ 1
- ($\overline{OE} = \overline{OD} - \overline{OC}$, dus) de coördinaten van E zijn $(67,5; -9,5)$ 1
- De kromme OE heeft een formule van de vorm $y = ax^2$, dus $-9,5 = a \cdot 67,5^2$ 1
- Dit geeft voor a de waarde $-0,002$ (of nauwkeuriger) 1
- Dus een formule voor kromme CD is $y = -0,002 \cdot (x - 87,5)^2 + 32,5$ 1

5 maximumscore 6

- $50 \text{ ml} = 50000 \text{ mm}^3$ 1
- Gevraagd wordt de waarde van h waarvoor $\int_{55,3}^h \pi(g(x))^2 dx = 50000$, waarbij h de x -coördinaat van P is 1
- Een primitieve van $-x^2 + 175x - 6600$ is $-\frac{1}{3}x^3 + 87,5x^2 - 6600x$ 1
- $\pi\left(\left(-\frac{1}{3}h^3 + 87,5h^2 - 6600h\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 55,3^3 + 87,5 \cdot 55,3^2 - 6600 \cdot 55,3\right)\right) = 50000$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- ($h \approx 81$, dus) de x -coördinaat van P is 81 1

Lijn en cirkel

6 maximumscore 6

Voor vraag 6 moet altijd alle punten worden toegekend, ongeacht of er wel of geen antwoord gegeven is, en ongeacht het gegeven antwoord.

7 maximumscore 8

- Een vergelijking van de gegeven cirkel is $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 1
- De coördinaten van $A(a, pa)$ invullen in deze vergelijking geeft $(a-2)^2 + (pa)^2 = 4$ 1
- Omdat $OA = 3$ geldt $a^2 + (pa)^2 = 9$ 1
- Beschrijven hoe op algebraïsche wijze met behulp van bovengenoemde vergelijkingen de waarde van a gevonden kan worden 2
- $a = \frac{9}{4}$ 1
- Invullen in $a^2 + (pa)^2 = 9$ geeft $p^2 = \frac{7}{9}$ 1
- Hieruit volgt (omdat $p > 0$) $p = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ (of een gelijkwaardige vorm) 1

of

- Een vergelijking van de gegeven cirkel is $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 1
- Punt A is een snijpunt van de gegeven cirkel en de cirkel met middelpunt O en straal 3, die als vergelijking heeft $x^2 + y^2 = 9$ 1
- Beschrijven hoe op algebraïsche wijze met behulp van bovengenoemde vergelijkingen de x -coördinaat van A gevonden kan worden 1
- De x -coördinaat van A is $\frac{9}{4}$ 1
- De y -coördinaat van A is dus $\frac{9}{4}p$ (omdat A op de lijn $y = px$ ligt) 1
- Dit geeft: $(\frac{9}{4})^2 + (\frac{9}{4}p)^2 = 9$ 1
- Dit herleiden tot $p^2 = \frac{7}{9}$ 1
- Hieruit volgt (omdat $p > 0$) $p = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ (of een gelijkwaardige vorm) 1

of

- Het inzicht dat $p = \tan \alpha$ met $\angle MOA = \alpha$ 2
- Toepassen van de cosinusregel in driehoek MOA geeft $2^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$ 1
- Hieruit volgt $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ 2
- Een aanpak waarbij α een hoek is in een rechthoekige driehoek met schuine zijde 4 en rechthoekszijden 3 en $\sqrt{7}$ 2
- Hieruit volgt $\tan \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ (en dus $p = \frac{1}{3}\sqrt{7}$) (of een gelijkwaardige vorm) 1

Tussen twee sinusgrafieken

8 maximumscore 4

- De oppervlakte van V is $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} (f(x) - g(x)) dx$ 1
- Een primitieve van $f(x) - g(x)$ is $-\cos x + \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$ 2
- De oppervlakte van V is dus $\left[-\cos x + \cos(x + \frac{1}{3}\pi)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} = 2$ 1

9 maximumscore 4

Voor vraag 9 moet altijd alle punten worden toegekend, ongeacht of er wel of geen antwoord gegeven is, en ongeacht het gegeven antwoord.

Drie vierkanten in een rechthoek

10 maximumscore 9

- Een aanpak waarbij (bijvoorbeeld) de zijde van A x wordt genoemd 1
- De lengte van de zijde van B is $30 - x$ 1
- De lengte van de zijde van C is gelijk aan $20 - (30 - x) = x - 10$ 1
- De oppervlakte van D is $20 \cdot 30 - x^2 - (30 - x)^2 - (x - 10)^2$ 1
- $(30 - x)^2 = 900 - 60x + x^2$ en $(x - 10)^2 = x^2 - 20x + 100$ 1
- Dus de oppervlakte van D is $600 - x^2 - 900 + 60x - x^2 - x^2 + 20x - 100$ 1
- Deze uitdrukking vereenvoudigen tot $-3x^2 + 80x - 400$ 1
- Beschrijven hoe op algebraïsche wijze berekend kan worden voor welke waarde van x (in het interval $[10, 20]$) dit maximaal is 1
- De gevraagde lengte is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$) 1

of

- Een aanpak waarbij (bijvoorbeeld) de zijde van A x wordt genoemd 1
- De lengte van de zijde van B is $30 - x$ 1
- De lengte van de zijde van C is gelijk aan $20 - (30 - x) = x - 10$ 1
- De oppervlakte van D is maximaal als de totale oppervlakte van A , B en C minimaal is 1
- De totale oppervlakte van A , B en C is $x^2 + (30 - x)^2 + (x - 10)^2$ 1
- $(30 - x)^2 = 900 - 60x + x^2$ en $(x - 10)^2 = x^2 - 20x + 100$ 1
- Dus de totale oppervlakte van A , B en C is $3x^2 - 80x + 1000$ 1
- Beschrijven hoe op algebraïsche wijze berekend kan worden voor welke waarde van x (in het interval $[10, 20]$) dit minimaal is 1
- De gevraagde lengte is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$) 1

of

- Een aanpak waarbij (bijvoorbeeld) de zijde van A x wordt genoemd 1
- De lengte van de zijde van B is $30 - x$ 1
- De lengte van de zijde van C is gelijk aan $20 - (30 - x) = x - 10$ 1
- De oppervlakte van D is $20 \cdot 30 - x^2 - (30 - x)^2 - (x - 10)^2$ 1
- $D'(x) = -2x + 2(30 - x) - 2(x - 10)$ 2
- Dit geeft $D'(x) = -6x + 80$ 1
- Er moet (in het interval $[10, 20]$) gelden $D'(x) = 0$, dus $-6x + 80 = 0$ 1
- De gevraagde lengte is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$) 1

Lus

11 maximumscore 6

- De snelheidsvector op tijdstip t is $\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix}$ 1
- Op de tijdstippen $t = -1$ en $t = 1$ is de snelheidsvector respectievelijk $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 1
- Dus de raaklijnen zijn evenwijdig als $2t = -(3t^2 - 1)$ of $2t = 3t^2 - 1$ 1
- $2t = 3t^2 - 1$ geeft ($t = 1$ of) $t = -\frac{1}{3}$, dus de benodigde tijd om van O naar A te bewegen is $\frac{2}{3}$ 1
- $2t = -(3t^2 - 1)$ geeft ($t = -1$ of) $t = \frac{1}{3}$, dus de benodigde tijd om van B naar O te bewegen is $\frac{2}{3}$ 1
- Hieruit volgt: de benodigde tijd om van A naar B te bewegen is $(2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3})$ en dit is) ook $\frac{2}{3}$ 1

of

- De snelheidsvector op tijdstip t is $\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix}$ 1
- Op de tijdstippen $t = -1$ en $t = 1$ is de snelheidsvector respectievelijk $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 1
- De drie benodigde tijden zijn (samen 2, dus zijn ze) even lang als elk van deze tijden $\frac{2}{3}$ is 1
- Om aan te tonen dat de drie benodigde tijden even lang zijn, is het dus voldoende om aan te tonen dat het punt zich op het tijdstip $t = -\frac{1}{3}$ in A bevindt en dat het punt zich op het tijdstip $t = \frac{1}{3}$ in B bevindt 1
- Op de tijdstippen $t = -\frac{1}{3}$ en $t = \frac{1}{3}$ is de snelheidsvector respectievelijk $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 1
- Hieruit volgt dat de raaklijn aan de baan op de tijdstippen $t = -\frac{1}{3}$ en $t = \frac{1}{3}$ dus evenwijdig is met een van de raaklijnen in O (zodat het punt zich dan inderdaad in A respectievelijk B bevindt) (en dus geldt het gestelde) 1

Lijn door perforatie

12 maximumscore 7

Voor vraag 12 moet altijd alle punten worden toegekend, ongeacht of er wel of geen antwoord gegeven is, en ongeacht het gegeven antwoord.

Verschoven platen

13 maximumscore 4

- Driehoek POA is gelijkvormig met driehoek $PQ'O$ 1
- $\frac{PQ'}{PQ} = \frac{PO}{PA}$ en $PA = \sqrt{p^2 + 35^2}$ geeft $\frac{p+q}{280} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1225}}$ 2
- Hieruit volgt $p+q = \frac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}}$, dus $q = \frac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}} - p$ 1

14 maximumscore 4

- $q'(p) = \frac{280 \cdot \sqrt{p^2 + 1225} - 280p \cdot \frac{2p}{2\sqrt{p^2 + 1225}}}{p^2 + 1225} - 1$ 2
- Dus $q'(p) = \frac{280(p^2 + 1225) - 280p^2}{(p^2 + 1225) \cdot \sqrt{p^2 + 1225}} - 1$ 1
- De rest van de herleiding 1

15 maximumscore 6

- $q'(p) = 0$ geeft $\frac{343\,000}{(p^2 + 1225) \cdot \sqrt{p^2 + 1225}} - 1 = 0$ 1
- Dit geeft $(p^2 + 1225)^{\frac{3}{2}} = 343\,000$ 2
- Hieruit volgt $p^2 + 1225 = 4900$ 1
- Dit geeft $p = \sqrt{3675}$ (of $p = 35\sqrt{3}$) 1
- Het antwoord: $q = 3\sqrt{3675}$ (of $q = 105\sqrt{3}$) 1